

# Control Para Consenso de Robots de Uniones Flexibles

S. Avila-Becerril  
Facultad de Ingeniería-UNAM  
Coyoacan DF 04510, México  
soavbec@gmail.com

G. Espinosa-Perez  
Facultad de Ingeniería-UNAM  
Coyoacan DF 04510, México  
gerardoe@unam.mx

**Resumen**—El problema de consenso en redes compuestas por sistemas Lagrangianos totalmente-actuados ha recibido bastante atención por parte de la comunidad de control. Desafortunadamente, el caso de redes formadas por sistemas subactuados del mismo tipo no ha sido estudiado de manera tan profunda y la literatura relacionada es muy reducida. En este artículo se propone un nuevo esquema de control para resolver el caso particular de consenso en una red compuesta por agentes definidos por robots de uniones flexibles. Este controlador basado en desacoplamiento explota la estructura de la dinámica individual de los agentes para dar solución al problema. La utilidad del controlador es validada por medio de simulaciones numéricas.

**Palabras clave:** Sistemas Multiagentes, Consenso, Robots de uniones flexibles.

## I. INTRODUCCIÓN

Desde hace más de una década el estudio de sistemas interconectados y sus aplicaciones han recibido bastante atención por parte de la comunidad de control. En este sentido, la revista *Control Systems*, editada por la IEEE, ha dedicado varios números al Control de Redes Complejas (*Control-Systems*, 2001*b*), (*Control-Systems*, 2001*a*), (*Control-Systems*, 2002), (*Control-Systems*, 2007). Aquí se reconocen sistemas de control donde uno o más lazos se interconectan vía redes dinámicas con el fin de resolver problemas de sistemas compuestos por sensores distribuidos, grupos de satélites y problemas de control de formación de multivehículos terrestres, aéreos o marinos. En general, se observa la preocupación por diseñar controladores robustos para sistemas interdependientes donde la dinámica individual afecta el comportamiento global y colectivo del sistema interconectado. En este contexto, el problema de consenso, en un grupo de agentes de sistemas dinámicos interconectados, consiste en establecer condiciones bajo las cuales las diferencias entre cualesquiera dos estados, que caracterizan la dinámica de los agentes, se desvanezcan asintóticamente.

En la literatura se ha abordado el problema desde diferentes perspectivas. En sus inicios, se consideraron grupos de agentes con dinámicas simples como cadenas de integradores o masas puntuales (Fax y Murray, 2002), (Fax y Murray, 2004). Más adelante, se abordó el problema

tomando en cuenta escenarios más complicados, entre ellos la existencia de retardos en la transmisión de información, o bien topologías que cambian con el tiempo (Olfati-Saber y Murray, 2004), (Moreau, 2005).

Por otro lado, el estudio de Sistemas Multiagente (MA) con dinámicas individuales no-lineales también se ha hecho desde diferentes enfoques. Una técnica que ha producido resultados muy atractivos está relacionada con las nociones de pasividad (Arcak, 2007), (Chopra y Spong, 2006*b*), (Scardovi *et al.*, 2010) donde se explotan las ventajas que la técnica ofrece para estudiar sistemas interconectados. En este contexto y motivados por la gran cantidad de sistemas físicos que pueden ser descritos por ecuaciones Euler-Lagrange, se han reportado numerosos trabajos donde se considera a la dinámica individual de los agentes como Sistemas Lagrangianos (Nuño *et al.*, 2011) o bien como sistemas pasivos (Chopra y Spong, 2006*b*), (Arcak, 2007). En ambos casos se proponen técnicas desde el punto de vista de los esquemas de control basados en pasividad (PBC por sus siglas en inglés).

En este mismo marco, la clase de sistemas Lagrangianos totalmente actuados ha recibido bastante atención. Así, en (Chopra y Spong, 2006*a*) se aborda el problema de sistemas mecánicos para dar solución al problema de coordinación multi-robot. Aquí se utiliza como candidata a función de Lyapunov del sistema multiagente la suma de las funciones de almacenamiento de los  $N$ -agentes. Recientemente, (Nuño *et al.*, 2011) ha reportado un resultado unificado para dos escenarios, el problema de sincronización cuando está definida explícitamente una trayectoria deseada y la de consenso, que evita el problema de consenso en cero de (Chung y Slotine, 2009) cuando no existe referencia deseada. En este artículo se consideran sistemas dinámicos no lineales, no idénticos y totalmente actuados descritos por ecuaciones Euler Lagrange, con parámetros desconocidos y bajo la suposición de que todo el estado está disponible para su medición. Se analiza, además, el caso donde el canal de comunicación entre los agentes está sujeto a retardos. El protocolo de consenso resultante es una ley de acoplamiento no-lineal adaptable que da solución al problema de sincronización y de consenso, donde la única suposición sobre el grafo dirigido es que está conectado.

Desafortunadamente, el problema de redes formadas por sistemas subactuados no ha sido estudiado de manera tan exhaustiva. En (Nair y Leonard, 2008) se aplica la técnica de Lagrangianos Controlados para resolver el problema de sincronización de sistemas mecánicos sin considerar retardos en la comunicación. Por otro lado, en (Avila-Becerril y Espinosa-Perez, 2012) se hizo una extensión al resultado de (Nuño *et al.*, 2011) y se propuso un esquema de control que da solución al problema de consenso en robots de uniones flexibles, como un caso particular de Sistemas Lagrangianos subactuados, considerando retardos en la comunicación y heredando las suposiciones débiles sobre el grafo de comunicación de (Nuño *et al.*, 2011). Sin embargo, este protocolo de consenso tiene el inconveniente de que para ser implementado necesita del conocimiento de las condiciones iniciales.

El objetivo de este artículo es entonces dar una alternativa de solución a la propuesta en (Avila-Becerril y Espinosa-Perez, 2012) al plantear un esquema de control que explota la forma particular del modelo de la red de robots de uniones flexibles. Así, se utiliza el controlador para obtener dos subsistemas conectados en cascada, donde la ley de control resultante no depende de las condiciones iniciales. La propuesta de solución mencionada se compone, como es usual, de dos elementos: el control de la dinámica individual y la interconexión entre los agentes. El problema de la interconexión se aborda utilizando herramientas de la teoría de grafos, mientras que el del control de cada robot es llevada a cabo usando un esquema propuesto en (Brogliato *et al.*, 1995) y discutido en (Ortega *et al.*, 1998) para robots individuales.

El resto del artículo está organizado de la siguiente forma: En la sección II se presenta el modelo de la red que se considera. El controlador propuesto se presenta en la sección III, la cual se ha dividido en dos partes, primero se establecen las condiciones de convergencia del error de consenso y luego se propone el protocolo de comunicación que asegura se cumplen las condiciones expuestas. Una evaluación numérica del controlador presentado está en la Sección IV. Mientras que en la Sección V se encuentran las conclusiones.

## II. PROBLEMA DE CONSENSO

En lo que resta de este artículo, los vectores estarán asociados a dos subíndices  $i, j$ . El primer subíndice denota el número del robot flexible que compone a la red; es decir,  $i \in \bar{N} = \{1, \dots, N\}$ , donde  $N$  es el número total de robots en la red. El subíndice  $j$  señala si la coordenada es *no-actuada* o *actuada*. Así,  $j = 1$  se refiere a la coordenada no-actuada mientras que  $j = 2$  hace referencia a la actuada.

Considerando entonces a los vectores  $\mathbf{q}_1 := \text{col}(\bar{\mathbf{q}}_{11}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{N1}) \in \mathbb{R}^{Nn}$  y  $\mathbf{q}_2 := \text{col}(\bar{\mathbf{q}}_{12}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{N2}) \in \mathbb{R}^{Nn}$  como la composición directa de las coordenadas no-actuadas y actuadas de los  $N$  robots, respectivamente,

se puede escribir al modelo multiagente como

$$\begin{aligned} D(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + G(\mathbf{q}_1) + K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) &= 0 \\ J\ddot{\mathbf{q}}_2 - K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) &= \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1)$$

con la matriz de inercias de los eslabones rígidos  $D = \text{diag}\{\bar{D}_1, \dots, \bar{D}_N\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ , la matriz de Coriolis  $C = \text{diag}\{\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_N\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ , la matriz que contiene a las matrices de elasticidad  $K = \text{diag}\{\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_N\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ , la matriz de inercias de los actuadores  $J = \text{diag}\{\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_N\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$  y el vector de fuerzas gravitacionales  $G = \text{col}(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$ , mientras que  $\mathbf{u} = \text{col}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N) \in \mathbb{R}^{Nn}$ .

Puede observarse que con las definiciones<sup>1</sup> de  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{q}_2$  en (1) se recupera la estructura del modelo de un solo robot de uniones flexibles, la cual claramente es la de un modelo subactuado cuyo orden es el doble que el de una red formada por robots de uniones rígidas como la considerada en (Nuño *et al.*, 2011).

En lo concerniente a la interconexión de los robots, el intercambio de información se representa por un grafo dirigido y conectado, modelado por la matriz Laplaciana  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , definida en (Olfati-Saber y Murray, 2004) como

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^N a_{ik} & j = i \\ -a_{ij} & j \neq i \end{cases} \quad (2)$$

con  $a_{ij} = 1$  si  $j \in \mathcal{N}_i$ ,  $a_{ij} = 0$  en otro caso y  $\mathcal{N}_i$  el conjunto de agentes vecinos transmitiendo información al  $i$ -th robot.

**Observación.** La matriz Laplaciana  $\mathcal{L}$  exhibe algunas propiedades estructurales que será utilizadas en lo siguiente. Entre ellas que  $\mathcal{L}\mathbf{1}_N = 0$ , donde  $\mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^N$  es un vector de unos. Mientras que, bajo la suposición de que el grafo está conectado, en el sentido de que tiene un árbol de expansión dirigido, esto es que existe por lo menos un nodo desde el cual se puede tener acceso al resto de los nodos; entonces el  $\text{rank}\{\mathcal{L}\} = N - 1$ , lo que significa que tiene un valor propio simple en cero y el resto de su espectro tiene parte real positiva.

Bajo estas condiciones es posible hacer la formulación del problema como

**Formulación del Problema:** Considere una red compuesta por  $N$  robots de uniones flexibles como los del modelo (1), interconectada por medio de un protocolo de comunicación caracterizado por la matriz Laplaciana  $\mathcal{L}$ . Asuma:

- La red tiene un árbol de expansión dirigido, i.e. está conectada.
- Los parámetros de los robots son conocidos aunque pueden ser diferentes entre ellos.
- Para cada robot el estado completo está disponible para su medición.

Encuentre la ley de control  $\mathbf{u}$  tal que las coordenadas no-actuadas  $\mathbf{q}_1$  alcancen un consenso, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_1 = \mathbf{1}_N \otimes$

<sup>1</sup>Con la idea de evitar dificultades con la notación, en lo subsecuente se señalarán las dimensiones de los vectores y matrices sólo cuando sea necesario.

$\mathbf{q}_c$ , para algún vector constante  $\mathbf{q}_c \in \mathbb{R}^n$ , con  $\otimes$  el producto de Kronecker estándar, satisfaciendo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\mathbf{q}}_1| = 0$  y garantizando estabilidad interna.

### III. PROTOCOLO DE CONSENSO

#### Convergencia del error de consenso

Considere el error de consenso para las coordenadas no actuadas como

$$\mathbf{e}_1 = (\mathcal{L} \otimes I_n) \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^{Nn} \quad (3)$$

de manera que bajo la suposición de la existencia de un árbol de expansión, el error de consenso es cero si y solo si las entradas del vector  $\mathbf{q}_1$  son iguales. Considere a su vez dos variables auxiliares

$$\epsilon_1 = \dot{\mathbf{q}}_1 + \lambda_1 \mathbf{e}_1 \quad ; \quad \epsilon_2 = \ddot{\mathbf{q}}_2 + \Lambda_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (4)$$

donde a  $\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2d} \in \mathbb{R}^{Nn}$  se le ha llamado *error de seguimiento* y representa el error entre la señal deseada para las coordenadas actuadas, dada por el controlador, y las coordenadas actuadas reales. Mientras que  $\Lambda_2 = \text{diag}\{\Lambda_{12}, \Lambda_{22}, \dots, \Lambda_{N2}\} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ , con entradas positivas definidas, es una matriz de ganancias.

Para probar que la convergencia del error de consenso a cero implica alcanzar el objetivo de consenso, se han seguido las ideas presentadas en (Scardovi *et al.*, 2010) y (Nuño *et al.*, 2011), donde bajo las definiciones de  $\epsilon_1$  y  $e_1$  es posible escribir la siguiente ecuación diferencial para el vector de coordenadas no-actuadas

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = -\lambda_1 (\mathcal{L} \otimes I_n) \mathbf{q}_1 + \epsilon_1 \quad (5)$$

que es un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) con entrada  $\epsilon_1$ . Donde la matriz  $\mathcal{L} \otimes I_n$  no es Hurwitz. Sin embargo, siguiendo las ideas del resultado presentado en (Nuño *et al.*, 2011), se define  $\mathbf{y}_1 = (Q \otimes I_n) \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^{(N-1)n}$ , cuya dinámica, evaluada a lo largo de (5) satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = -\lambda_1 [Q \mathcal{L} Q^T \otimes I_n] \mathbf{y}_1 + (Q \otimes I_n) \epsilon_1 \quad (6)$$

donde la matriz  $Q \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$  tiene las siguientes propiedades: i)  $Q Q^T = I_{N-1}$ , ii)  $Q^T Q = I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$ , iii)  $Q \mathbf{1}_N = 0$ , iv)  $(Q \otimes I_n) \mathbf{q}_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{q}_1 = (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{q}_c)$ . En este sentido, como la matriz  $-Q \mathcal{L} Q^T$  es **Hurwitz** para un grafo *conectado* y consecuentemente  $Q \mathcal{L} Q^T \otimes I_n$  también lo es, significa que (6) es un sistema LTI Asintóticamente Estable con entrada  $\epsilon_1$ . Puede probarse entonces, que la *convergencia a cero* de  $\epsilon_1$  implica que  $|\mathbf{y}_1| \rightarrow 0$ , y con esto el producto  $(Q \otimes I_n) \mathbf{q}_1 \rightarrow 0$ , expresión que, bajo la propiedad iv) de  $Q$ , permite concluir que  $\mathbf{q}_1 \rightarrow (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{q}_c)$  para algún vector  $\mathbf{q}_c \in \mathbb{R}^n$ . Con lo que el problema se transforma entonces en diseñar un protocolo de comunicación  $\mathbf{u}$  que asegure la convergencia a cero del error de seguimiento  $\epsilon_1$ .

**Convergencia del error de seguimiento.** Aquí se propone una ley de control  $\mathbf{u}$  que hace que en lazo cerrado se tengan

dos subsistemas conectados en cascada. La dinámica del sistema maestro, caracterizado por la dinámica actuada  $\mathbf{q}_2$ , se estabiliza con un controlador PD, mientras que su salida es conectada como la entrada de un sistema esclavo que representa la dinámica de  $\mathbf{q}_1$ . En este sentido, bajo las definiciones de (3), la primer parte de (4) y  $\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2d}$ , la dinámica no-actuada en el modelo (1) puede reescribirse como

$$D(\mathbf{q}_1) \dot{\epsilon}_1 + (C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_{d1}) \epsilon_1 - K \tilde{\mathbf{q}}_2 = \psi_1 \quad (7)$$

con  $\psi_1 = K \mathbf{q}_{2d} - K \mathbf{q}_1 - u_R$ , y la ley de control para robots de uniones rígidas  $\mathbf{u}_R = -\lambda_1 D(\mathbf{q}_1) \dot{\epsilon}_1 - \lambda_1 C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \epsilon_1 + G(\mathbf{q}_1) - K_{d1} \epsilon_1$ . De manera que definiendo al vector de coordenadas actuadas como

$$\mathbf{q}_{2d} = K^{-1} (K \mathbf{q}_1 + u_R) \quad (8)$$

resulta la siguiente ecuación diferencial que representa al subsistema esclavo

$$D(\mathbf{q}_1) \dot{\epsilon}_1 + (C(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) + K_{d1}) \epsilon_1 = K \tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (9)$$

#### Propiedades:

- La dinámica no forzada del subsistema esclavo en (9),  $\dot{\epsilon}_1 = f_0(\epsilon_1, 0)$ , es GAS. Lo anterior puede probarse con procedimientos estándar tomando como candidata a función de Lyapunov a  $V = \frac{1}{2} \epsilon_1^T D \epsilon_1$
- El mapa  $\tilde{\mathbf{q}}_2 \rightarrow \epsilon_1$  es Entrada Estado Estable (ISS). Considere para esto a  $H(\epsilon_1) = \frac{1}{2} \epsilon_1^T D \epsilon_1$ , y a su derivada temporal evaluada a lo largo de (9) dada por  $\dot{H} = -(1 - \theta) \epsilon_1^T K_{d1} \epsilon_1 - \theta \epsilon_1^T K_{d1} \epsilon_1 + \epsilon_1^T K \tilde{\mathbf{q}}_2$ , de donde  $\dot{H} \leq -(1 - \theta) \epsilon_1^T K_{d1} \epsilon_1$  para  $0 < \theta < 1$  y cualquier bola centrada en el origen con radio definido por  $\tilde{\mathbf{q}}_2$ ,  $\|\epsilon_1\| \geq \frac{\|K\| \|\tilde{\mathbf{q}}_2\|}{\theta \lambda_{\min}(K_{d1})}$

Por otro lado, la dinámica actuada del modelo de la red (1) expresada en términos de  $\ddot{\mathbf{q}}_2 = \ddot{\mathbf{q}}_2 + \ddot{\mathbf{q}}_{2d}$  puede escribirse como

$$J \ddot{\mathbf{q}}_2 + K_{d2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{p2} \tilde{\mathbf{q}}_2 = \psi_2 \quad (10)$$

con  $\psi_2 = \mathbf{u} + K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - J \ddot{\mathbf{q}}_{2d} + K_{d2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{p2} \tilde{\mathbf{q}}_2$ . De manera que utilizando la ley de control PD

$$\mathbf{u} = K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + J \ddot{\mathbf{q}}_{2d} - K_{d2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 - K_{p2} \tilde{\mathbf{q}}_2 \quad (11)$$

con las ganancias  $K_{d2}, K_{p2} > 0$ , se obtiene la dinámica en lazo cerrado para el subsistema maestro dada por

$$J \ddot{\mathbf{q}}_2 + K_{d2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + K_{p2} \tilde{\mathbf{q}}_2 = 0 \quad (12)$$

que claramente es Global y Exponencialmente Estable (GES). De manera que con la ley de control expresada en (11) y (8), el sistema en lazo cerrado puede expresarse como el sistema que se presenta en la Fig 1. Mientras que, aludiendo a herramientas de teoría en cascada (Khalil, 2002), se garantiza que el origen de la cascada es GAS y se cumple en particular que la entrada al sistema en (5)  $\epsilon_1$  converge a cero asintóticamente.

**Observación.** Nótese que esta ley de control es mucho más simple que la reportada en (Avila-Becerril y Espinosa-Perez, 2012), en donde además se requiere el conocimiento de las condiciones iniciales. Sin embargo, ahora la expresión para  $\mathbf{q}_{2d}$  en (8) depende directamente de la variable  $\mathbf{q}_1$  y de su segunda derivada en la ley de control. La variable  $\ddot{\mathbf{q}}_1$  puede ser calculada del modelo y aún cuando esto conlleva la necesidad del conocimiento de la inversa de la matriz de inercia, el autor considera la condición razonable bajo la suposición inicial del conocimiento paramétrico del sistema.

$$\boxed{J\ddot{\mathbf{q}}_2 + K_{d2}\dot{\mathbf{q}}_2 + K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2 = 0} \rightarrow \boxed{K\tilde{\mathbf{q}}_2 = D\dot{\epsilon}_1 + (C + K_{d1})\epsilon_1}$$

GES ISS

Figura 1. Sistema en cascada

**Extensión al Espacio de Trabajo.** Es interesante notar que el problema de consenso presentado anteriormente se puede formular en términos de coordenadas cartesianas, con interés sólo en la posición del efector final. Considere para esto al vector  $\mathbf{x} := \text{col}(\bar{\mathbf{x}}_1, \dots, \bar{\mathbf{x}}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  con  $\bar{\mathbf{x}}_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^3$  que representa las coordenadas cartesianas del efector final, y que la posición cartesiana de los  $N$ -robots de uniones flexibles no redundantes ( $n = 3$ ) puede ser obtenida de la cinemática directa  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}_1$  con  $\mathbf{q}_1 = \text{col}(\bar{\mathbf{q}}_{11}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{N1}) \in \mathbb{R}^{3N}$  y la matriz de Jacobianos  $\mathbf{J} := \text{diag}\{\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_N\}$ ,  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$ , donde  $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_N$  son suaves e invertibles. Entonces, la representación de los  $N$  robots es de la forma

$$\tilde{D}(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{x}} + \tilde{G}(\mathbf{q}_1) + \mathbf{J}^{-T}K\mathbf{q}_1 - \mathbf{J}^{-T}K\mathbf{q}_2 = 0$$

$$J\ddot{\mathbf{q}}_2 - K(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \mathbf{u} \quad (13)$$

con  $\tilde{D} = \mathbf{J}^{-T}D\mathbf{J}^{-1}$ ,  $\tilde{C} = \mathbf{J}^{-T}(C\mathbf{J}^{-1} + D\frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1}))$ ,  $\tilde{G} = \mathbf{J}^{-T}G$ , para el cual se cumple que  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$  es una matriz simétrica, positiva definida y  $(\tilde{D} - 2\tilde{C})$  es antisimétrica. En este caso, el objetivo de control es el de alcanzar consenso en las  $N$  coordenadas del efector final tal que  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{1}_N \otimes \bar{\mathbf{x}}_c$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para algún  $\bar{\mathbf{x}}_c \in \mathbb{R}^3$ . De manera que definiendo a los errores

$$\mathbf{e}_1 = (\mathcal{L} \otimes I_3)\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} \quad \text{y} \quad \epsilon_1 = \dot{\mathbf{x}} + \lambda_1\mathbf{e}_1, \quad (14)$$

con el error de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{2d} \in \mathbb{R}^{3N}$  y su variable auxiliar  $\epsilon_2 = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2 + \Lambda_2\tilde{\mathbf{q}}_2$ , puede escribirse una ecuación para las coordenadas cartesianas con la misma estructura que (5) como

$$\dot{\mathbf{x}} = -\lambda_1(\mathcal{L} \otimes I_3)\mathbf{x} + \epsilon_1$$

que es LTI con entrada  $\epsilon_1$ . De tal forma que si  $\epsilon_1 \in L_2 \cap L_\infty$ , entonces utilizando la salida  $\mathbf{y}_1 = (Q \otimes I_3)\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3(N-1)}$ , se puede concluir que  $\mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{1}_N \otimes \bar{\mathbf{x}}_c)$ , y nuevamente el problema es diseñar un protocolo de comunicación que asegure que  $\epsilon_1 \rightarrow 0$ . Afortunadamente, con una ley de

control análoga a (11) y (8) puede resolverse el problema. Esto es, la señal de control

$$\mathbf{u} = K(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + J\ddot{\mathbf{q}}_{2d} - K_{d2}\dot{\mathbf{q}}_2 - K_{p2}\tilde{\mathbf{q}}_2$$

con

$$\mathbf{q}_{2d} = (\mathbf{J}^{-T}K)^{-1}(\mathbf{J}^{-T}K\mathbf{q}_1 + \mathbf{u}_R) \quad (15)$$

y  $\mathbf{u}_R = -\lambda_1\tilde{D}(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon}_1 - \lambda_1\tilde{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\epsilon_1 + \tilde{G}(\mathbf{q}_1) - K_{d1}\epsilon_1$ , garantiza la preservación de la estructura del sistema en lazo cerrado (12) y (9) que se obtuvo en el caso del control en coordenadas articulares, por lo que puede utilizarse el mismo análisis de estabilidad.

**Observación.** Otro controlador que resuelve el problema de consenso para las posiciones cartesianas de los efectores finales es  $\mathbf{u} = -K_{d2}\epsilon_2 + J(\ddot{\mathbf{q}}_{2d} - \Lambda_2\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_2) +$

$$K\left(\int_0^t \Lambda_2\tilde{\mathbf{q}}_2(\tau)d\tau + \mathbf{q}_{2d} + \mathbf{q}_2(0)\right)$$

$$\text{y } \mathbf{q}_{2d} = \frac{p}{(p+\Lambda_2)} \left( (\mathbf{J}^{-T}K)^{-1} \mathbf{u}_r + \Lambda_2 \int_0^t \mathbf{q}_2(\tau)d\tau - \mathbf{q}_2(0) \right),$$

con  $\mathbf{u}_r = -\lambda_1\tilde{D}(\mathbf{q}_1)\dot{\epsilon}_1 - \lambda_1\tilde{C}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\epsilon_1 + \tilde{G}(\mathbf{q}_1) + \mathbf{J}^{-T}K\mathbf{q}_1 - K_{d1}\epsilon_1$ , esta ley de control se obtiene directamente del control reportado en (Avila-Becerril y Espinosa-Perez, 2012) haciendo un análisis similar al expuesto anteriormente.

#### IV. SIMULACIONES

La utilidad del controlador basado en desacoplamiento se validó por medio de una simulación numérica con la ayuda del SIMULINK de MATLAB. Para esto se consideró una red formada por diez robots de uniones flexibles, cada uno de un grado de libertad, i.e. dos coordenadas generalizadas, donde la topología considerada para la red es la que se muestra en la Fig 2, la cual está caracterizada por su matriz Laplaciana

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los parámetros de los robots así como las condiciones iniciales de los mismos son los que se muestran en la tabla I. Mientras que los valores de las ganancias del controlador son  $\lambda_1 = 1,5$ ,  $K_{d1} = 0,5$ ,  $\Lambda_2 = \text{diag}(3, 3, 1,5, 3, 3, 1,5, 7, 10, 10, 1,5)$ ,  $K_{d2} = 0,5$  y  $K_{p2} = 50$ .

Bajo este marco, las Figuras 3, 4 y 5 retratan el comportamiento de las coordenadas no actuadas y sus velocidades, así como los errores de consenso, el de seguimiento y el valor de las entradas de control, respectivamente. La Fig 3 muestra la posición de las diez coordenadas no-actuadas, donde puede verse que, después de seis segundos (cada una

iniciando en un valor inicial diferente) exhiben el mismo valor en estado estacionario, este valor consensado depende de las condiciones iniciales de los robots.

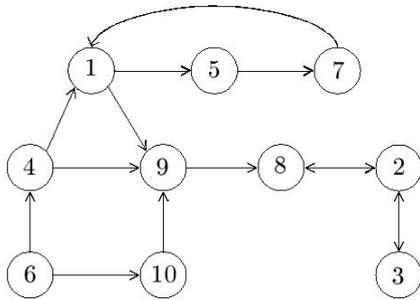


Figura 2. Protocolo de comunicación

Robots (1, 2, 3, 10)	Robots (4, 5, 6)	Robots (7, 8, 9)
$D = 0,031$	$D = 0,062$	$D = 0,124$
$\bar{J} = 0,004$	$\bar{J} = 0,008$	$\bar{J} = 0,016$
$Mgl = 0,8$	$Mgl = 1,6$	$Mgl = 3,2$
$\bar{K} = 31$	$\bar{K} = 62$	$\bar{K} = 124$
$\bar{B} = 0,007$	$\bar{B} = 0,014$	$\bar{B} = 0,028$
$q_{10} = 25^\circ$	$q_{40} = 65^\circ$	$q_{70} = 10^\circ$
$q_{20} = 15^\circ$	$q_{50} = 45^\circ$	$q_{80} = 55^\circ$
$q_{30} = 5^\circ$	$q_{10} = 20^\circ$	$q_{90} = 35^\circ$
$q_{100} = 80^\circ$		

TABLA I

CONDICIONES INICIALES Y PARÁMETROS DE LOS ROBOTS

La Figura 4 se presenta para mostrar que el segundo objetivo de control también se satisface, en el sentido de que las velocidades de las coordenadas no actuadas de los diez robots se hacen cero. Por otro parte, la Figura 5 muestra los errores de consenso y de seguimiento, respectivamente, para asegurar que éstos se desvanecen, es decir, que las coordenadas actuadas alcanzan a sus deseadas y que con esto, las coordenadas no-actuadas llegan a un consenso.

Por último, en la Figura 6 se observa la magnitud de las señales de control, las cuales se mantienen todas acotadas y menores a 3 Nm. Mientras que, en la parte inferior de esta misma figura, pueden verse las coordenadas actuadas, aquí es interesante notar que debido al acoplamiento lineal, dado por la matriz de elasticidad, entre las coordenadas no-actuadas y las actuadas se observa que también estas últimas alcanzan un consenso.

## V. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una propuesta de esquema de control que soluciona el problema de consenso en una red compuesta por robots de uniones flexibles, como un caso particular de Sistemas Lagrangianos subactuados. El controlador presentado está basado en desacoplamiento y es un esquema alternativo a aquel propuesto en (Avila-Becerril y Espinosa-Perez, 2012).

La ley de control presentada, y que se especifica en (11), es

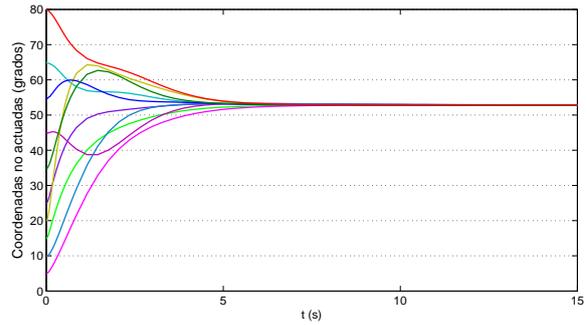


Figura 3. Posición de las coordenadas no-actuadas en grados

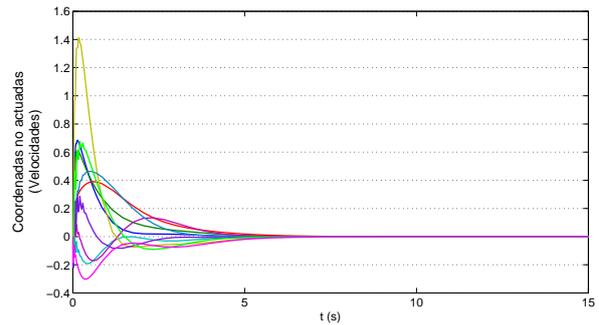


Figura 4. Velocidades en las coordenadas no-actuadas

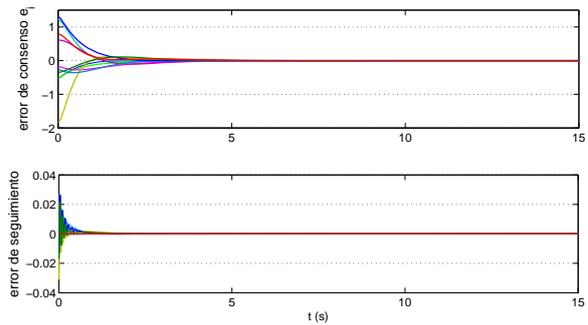


Figura 5. Errores de consenso y seguimiento

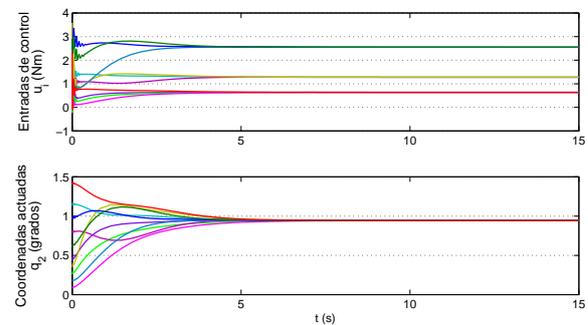


Figura 6. Señales de control y posición de las coordenadas actuadas

implementable puesto que se está suponiendo la medición completa del estado y a diferencia de (Avila-Becerril y Espinosa-Perez, 2012), su implementación es simple y no necesita del conocimiento explícito de las condiciones iniciales. Sin embargo, una desventaja de este esquema es la fuerte dependencia del conocimiento de los parámetros, en el cálculo de la inversa de la matriz de inercias. Por otro lado, el buen desempeño del controlador se ha evaluado numéricamente por medio de simulaciones. Finalmente, se ha presentado una extensión del controlador basado en desacoplamiento con el objetivo de consenso en el espacio de trabajo. Aquí, por simplicidad, se abordó el caso donde es de interés sólo la posición del efector final.

## VI. AGRADECIMIENTOS

Parte de este trabajo se ha realizado con el apoyo de DGAPA-UNAM (IN111211) y el apoyo entregado mediante la beca nacional de estudios de posgrado de CONACYT.

## REFERENCIAS

- Arcak, M. (2007). Passivity as a design tool for group coordination. *IEEE Trans on Automatic Control* **52**(8), 1380–1389.
- Avila-Becerril, S. y G. Espinosa-Perez (2012). Consensus Control of Flexible Joint Robots with Uncertain Communication Delays. En: *American Control Conference*. p. (to appear).
- Brogliato, B., R. Ortega y R. Lozano (1995). Global tracking controllers for flexible-joint manipulators: a comparative study. *Automatica* **31**(7), 941–956.
- Chopra, N. y M. Spong (2006a). Passivity-Based Control of Multi-Agent Systems. En: *International Symposium on Advanced Robotics and Machine Intelligence*.
- Chopra y M. Spong (2006b). Output Synchronization of Nonlinear Systems with Time Delay in Communication. En: *IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 4986–4982.
- Chung y J. Slotine (2009). Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems. *IEEE Transactions on Robotics* **25**(3), 686–700.
- Control-Systems (2001a). Control of Complex Networks. *Vol. 21, No.6*.
- Control-Systems (2001b). Networks and Control. *Vol. 21, No.1*.
- Control-Systems (2002). Complex Networks. *Vol. 22, No.1*.
- Control-Systems (2007). Complex Networked. *Vol. 27, No.4*.
- Fax, J. y R. Murray (2002). Graph laplacians and stabilization of vehicle formations. En: *15th IFAC Conference, 2002. Proceedings of the*. p. 283.
- Fax, J. y R. Murray (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Trans on Automatic Control* **49**(9), 1465–1476.
- Khalil, H. (2002). *Non Linear Systems*. Prentice Hall.
- Moreau, L. (2005). Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Trans on Automatic Control* **50**(2), 169–182.
- Nair y N. Leonard (2008). Stable synchronization of mechanical system networks. *SIAM Journal on Control and Optimization* **47**(2), 661–683.
- Nuño, E., R. Ortega, L. Basa nes y D. Hill (2011). Synchronization of networks of nonidentical euler-lagrange systems with uncertain parameters and communication delays. *IEEE Trans on Automatic Control* **56**(4), 935–941.
- Olfati-Saber, R. y R. Murray (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans on Automatic Control* **49**(9), 1520–1533.
- Ortega, R., A. Loria, P. Nicklasson y H. Sira-Ramirez (1998). *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*. Springer 1st edition.
- Scardovi, L., M. Arcak y E. Sontag (2010). Synchronization of interconnected systems with applications to biochemical networks: an input-output approach. *IEEE Trans on Automatic Control* **55**(6), 1367–1379.